ІІІ етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2014-2015 н.р.

Чернівецька обласна олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

23 січня 2015 року

8 клас

1. Не дочекавшись трамваю на зупинці A, хлопчик пішов до наступної зупинки B. Пройшовши $\frac{1}{3}$ шляху, він озирнувся і помітив, що до зупинки A наближається трамвай. Якщо хлопчик у цей момент побіжить до зупинки A або до зупинки B, то він прибіжить до кожної з них одночасно з приходом туди трамваю. Знайдіть швидкість бігу хлопчика, вважаючи її сталою (часом перебування трамваю на зупинці A знехтувати), якщо швидкість трамваю дорівнює 30 км/год.

Відповідь: 10 км/год.

Вказівки до розв'язання.

Якщо хлопчик побіжить до зупинки A, то він прибіжить туди одночасно з приходом трамваю. Оскільки хлопчик був від зупинки B удвічі далі, ніж від A, то коли він побіжить до B і пробіжить півшляху, трамвай саме підійде до зупинки A. Після цього трамвай і хлопчик одночасно прибувають на зупинку B, але трамвай проходить при цьому шлях, утричі довший, ніж пробігає хлопчик. Отже, швидкість хлопчика дорівнює 10 км/год.

2. Розв'яжіть у цифрах рівняння $(x+y)^3 = \overline{xyx}$.

Відповідь: $x = 3$, $y = 4$.

Вказівки до розв'язання.

З умови $100 \le (x+y)^3 < 1000$, тому $5 \le x+y \le 9$. Перебравши усі можливі значення $x+y$ знаходимо, що $x = 3$, $y = 4$.

3. Син з батьком відвідали тир. Спочатку батько придбав синові 10 патронів. За кожен промах батько забирав у сина один патрон, а за кожне влучання додавав один патрон. Загалом син зробив 55 пострілів. Скільки разів влучив хлопець?

Відповідь: 50 разів.

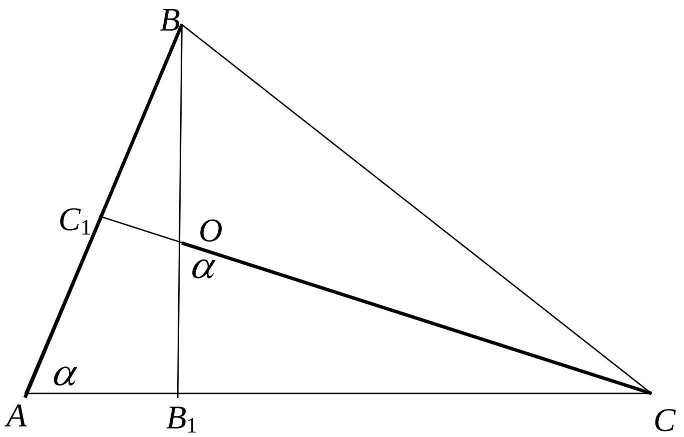
Вказівки до розв'язання.

Після кожного влучання кількість патронів у хлопця залишалася незмінною (один патрон він використовував і один патрон він отримував від батька), а після кожного промаху зменшувалася на два (один патрон він використовував і один патрон у нього забирав батько). Тому хлопець промахнувся 10 : 2 = 5 разів, а влучив 55 – 5 = 50 разів.

4. Висоти гострокутного трикутника *ABC* перетинаються у точці *O*. Виявилось, що *AB=OC* . Знайдіть величину кута *BCA*.

Відповідь: $\angle BCA = 45°$.

Вказівки до розв'язання.



Точка *O* лежить всередині трикутника *ABC*, бо він гострокутний. Нехай $\angle BAC = \alpha$. Тоді у прямокутному трикутнику AB_1B $\angle ABB_1 = 90° - \alpha$ і у прямокутному трикутнику AC_1C $\angle ACC_1 = 90° - \alpha$, а тому і у прямокутному трикутнику OB_1C $\angle B_1CO = 90° - \alpha$. Отже, у прямокутних трикутниках AB_1B і OB_1C рівні гострі кути і рівні гіпотенузи (*AB=OC* за умовою). Тоді ці трикутники рівні. А тому рівні і їх катети, що лежать напроти кута α $BB_1 = B_1C$. Отже, прямокутний трикутник BB_1C рівнобедрений і тому $\angle BCB_1 = 45°$ і $\angle BCA = 45°$.

5. Нехай для деякого дійсного *x* числа x^3 та $x^2 + x$ раціональні. Доведіть, що число *x* також раціональне.

Вказівки до розв'язання.

Якщо числа $a = x^3$, $b = x^2 + x$ раціональні, то $b + 1 = (x^2 + x) + 1 \neq 0$ і число $\frac{a+b}{b+1} = \frac{x^3 + (x^2 + x)}{(x^2 + x) + 1} = x$ раціональне.

9 клас.

1. У шаховому турнірі брало участь n шахістів. Кожний зустрічався з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилась внічию. Відомо, що кожний шахіст знає прізвища учасників турніру, яких він переміг, а також прізвища тих, кого перемогли переможені ним. Доведіть, що є учасник, який знає прізвища всіх шахістів, що беруть участь у турнірі.

Вказівки до розв'язання.

Нехай *A* – шахіст (або один із шахістів), що виграв найбільше партій. Доведемо, що *A* знає прізвища всіх учасників турніру. Позначимо $B_1, B_2, ..., B_k$ усіх тих шахістів, які програли *A*. Припустимо тепер, що шахіст *A* не знає прізвища шахіста *C*. Тоді з умови випливає, що *C* не є жодним з шахістів $B_1, B_2, ..., B_k$ і що всі партії у них він виграв. Отже, *C* виграв більше партій, ніж *A*. Прийшли до суперечності, а це й доводить, що *A* знає прізвища всіх шахістів.

2. Розв'яжіть у цифрах рівняння $\left(\overline{xy}\right)^2 = \overline{(y-1)xxy}$.

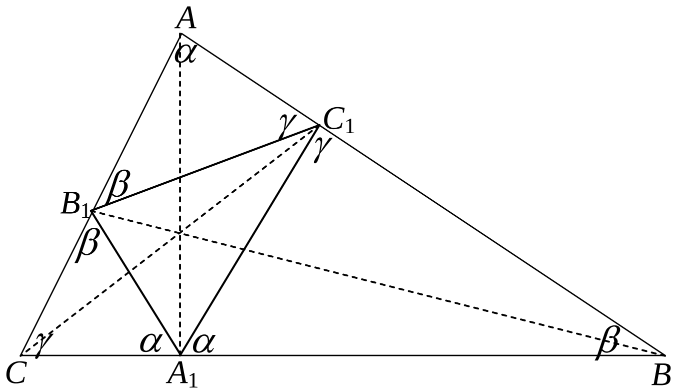
Відповідь: $x = 7$, $y = 6$.

Вказівки до розв'язання.

Позначимо шукане двозначне число $\overline{xy}$ через *a*. Тоді з даного рівняння одержуємо, що $a^2 - a$ ділиться на 100. Але $a^2 - a = a(a-1)$ є добуток двох послідовних, тобто взаємно простих цілих чисел, а такий добуток ділиться на 100 тільки у тому випадку, коли один із множників ділиться на 25, а інший на 4. Якщо *a* ділиться на 25, то $a \in \{25; 50; 75\}$, але жодне з виписаних чисел не задовольняє даному рівнянню. Якщо ж $a - 1$ ділиться на 25, то $a \in \{26; 51; 76\}$ і перевірка показує, що рівнянню задовольняє тільки число 76. Отже, $x = 7$, $y = 6$.

3. Вершинами трикутника є основи висот деякого гострокутного трикутника *ABC*. Виявилось, що такий трикутник подібний до трикутника *ABC*. Доведіть, що трикутник *ABC* правильний.

Вказівки до розв'язання.



Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти трикутника *ABC*. Вони перетинаються всередині трикутника, бо трикутник гострокутний. Позначимо $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Прямокутні трикутники ABA_1 та CBC_1 подібні, бо мають спільний гострий кут β. Тоді $\frac{A_1B}{AB} = \frac{BC_1}{BC}$. Звідси $\frac{A_1B}{BC_1} = \frac{AB}{BC}$. Тому трикутники *ABC* та A_1BC_1 подібні. Аналогічно, $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.

Тоді $\alpha = \angle BAC = \angle CA_1B_1 = \angle BA_1C_1$, $\beta = \angle ABC = \angle AB_1C_1 = \angle CB_1A_1$, $\gamma = \angle ACB = \angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$. Враховуючи подібність трикутників *ABC* та $A_1B_1C_1$ (за умовою), легко одержуємо, що кути α, β, γ трикутників $A_1B_1C_1$ та *ABC* рівні $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, а тому трикутник *ABC* правильний.

4. Для додатних чисел *a*, *b*, *c* доведіть нерівність $\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} \ge 3.$

Вказівки до розв'язання.

Нехай $x = a+b$, $y = b+c$, $z = c+a$. Тоді $2a = x+z-y$, $2b = x+y-z$, $2c = y+z-x$. Перетворимо ліву частину нерівності і застосуємо нерівність між середніми:

$$\frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} = \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} =$$

$$= \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1 + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 3 \ge$$

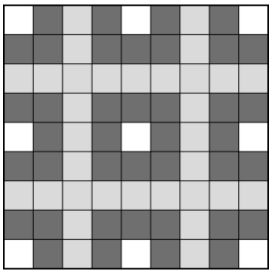
$$\ge 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 2\sqrt{\frac{z}{y} \cdot \frac{y}{z}} + 2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

5. Деякі клітинки дошки 9×9 пофарбували в один з двох кольорів. Виявилося, що якщо король рухатиметься з однієї незафарбованої клітинки в іншу, то обов'язково пройде через клітинки обох кольорів (король пересувається на будь-яку клітинку навколо себе по діагоналі, горизонталі чи вертикалі). Яка найбільша кількість клітинок могла бути незафарбованою на дошці?

Відповідь: 9.

Вказівки до розв'язання.

Розіб'ємо дошку 9×9 на дев'ять квадратів розміром 3×3. Зауважимо, що в кожному квадраті розміром 3×3 не може бути більше, ніж одна незафарбована клітинка. Якщо у квадраті розміром 3×3є принаймні дві незафарбовані клітинки, то король може потрапити з однієї незафарбованої клітинки в іншу не більше, ніж через одну зафарбовану. Тобто на дошці не може бути більше, ніж дев'ять незафарбованих клітинок, на рисунку зображено приклад.



10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^6\right)=8x^{12}$.

Відповідь: $x=1$, $x=-1$.

Вказівки до розв'язання.

Зауважимо, що $\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)\left(1+x^6\right)=1+x^2+x^4+x^6+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}$. Нехай $x^2>1$. Тоді x^{12} більше довільного меншого степеня x і $1+x^2+x^4+x^6+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}<8x^{12}$. Нехай $x^2<1$. Тоді x^{12} менше довільного меншого додатного степеня x і $1+x^2+x^4+x^6+x^6+x^8+x^{10}+x^{12}>8x^{12}$. Тому інших коренів, крім 1 і –1, у даного рівняння бути не може. А 1 і –1, очевидно, підходять.

2. Задано паличку довжиною x ($x>1$см). Два гравці ходять по черзі. За один хід дозволено розламати навпіл будь-яку з наявних паличок. Перемагає той гравець, після ходу якого з'являється паличка довжини не більше 1 см. При яких значення x перемогу може забезпечити собі перший гравець, а при яких – другий? Відповідь обґрунтуйте (наведіть виграшну стратегію).

Відповідь: При $x\le 2$см і $x>4$см перемагає перший гравець, при 2 см$<x\le 4$см перемагає другий гравець.

Вказівки до розв'язання.

Якщо $x\le 2$см, то перший гравець перемагає після першого ходу. Якщо 2 см$<x\le 4$см, то після ходу першого гравця буде дві рівних палички довжиною 1 см$<\frac{x}{2}\le 2$см і другий гравець перемагає після першого свого ходу.

Нехай $x>4$см. Після ходу першого гравця буде дві палички довжиною $\frac{x}{2}$. Якщо пофарбувати ці палички у два різні кольори, то виграшна стратегія першого гравця полягатиме у тому, щоб на кожному кроці ламати паличку такої ж довжини, але іншого кольору, як другий, до того моменту, поки другий гравець своїм ходом не утворить паличку довжиною не більше 2 см. Тоді першому гравцеві слід розламати цю паличку, що гарантує йому перемогу.

3. Знайдіть усі такі прості p, що число 2^p+p^2 також просте.

Відповідь: $p=3$.

Вказівки до розв'язання. Легко перевірити, що випадок $p=2$ не є розв'язком, а випадок $p=3$ є розв'язком. Тому розглянемо випадок $p>3$. Маємо, що $p^2\equiv 1\pmod 3$ та $2^p\equiv -1\pmod 3$, тому $2^p+p^2\equiv 0\pmod 3$, що неможливо бо 2^p+p^2 повинно бути простим.

4. Розв’яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z, \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x. \end{cases}$$

Відповідь: $(0;\,0;\,0)$, $(1;1;1)$.

Вказівки до розв’язання.

Очевидно, що всі три невідомі дорівнюють нулю тільки одночасно і розв’язком системи є $x = y = z = 0$.

Нехай тепер $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Тоді з даної системи одержуємо

$$\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{1+y^2}{2y^2} = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{1+z^2}{2z^2} = \dfrac{1}{x}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{y}, \\ \dfrac{1}{2y^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{z}, \\ \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Додавши ліві та відповідно праві частини рівнянь системи, одержимо рівняння-наслідок

$$\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y^2} - \frac{2}{y} + 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = 0.$$

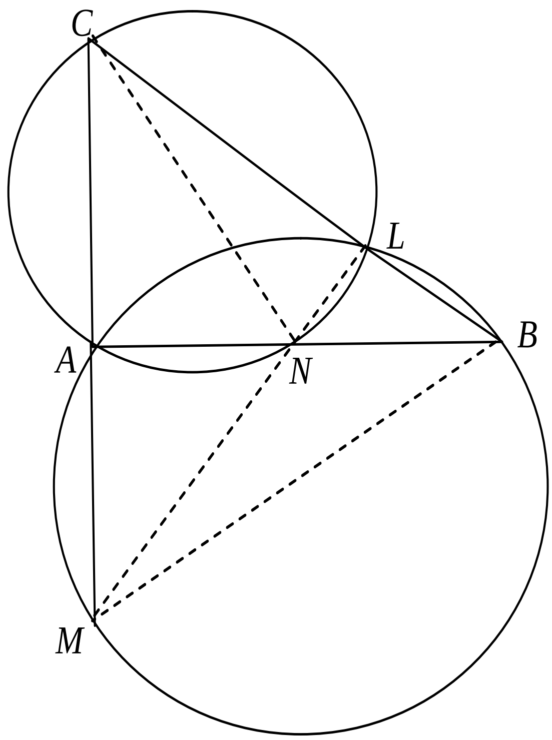
Останнє рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^2 = 0, \\ \left(\dfrac{1}{y} - 1\right)^2 = 0, \\ \left(\dfrac{1}{z} - 1\right)^2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 1, \\ \dfrac{1}{y} = 1, \\ \dfrac{1}{z} = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Перевірка показує, що трійка $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ є розв’язком даної системи.

5. На гіпотенузі BC прямокутного трикутника ABC відмітили точку L, відмінну від вершин B та C. Коло, описане навколо трикутника ABL, удруге перетинає пряму AC у точці M, а коло, описане навколо трикутника ACL, удруге перетинає пряму AB у точці N. Доведіть, що точки L, M та N лежать на одній прямій.

Вказівки до розв'язання.



Незалежно від того, з якого боку від точки A лежить точка M, $\angle BAM = 90°$. Це значить, що BM – діаметр кола, яке містить точки A, B, L та M. Оскільки L не збігається з точками B, C і, як наслідок, з точкою M, можемо записати, що $\angle BLM = 90°$. Аналогічно $\angle CLN = 90°$.

Таким чином, точки M та N лежать на перпендикулярі до прямої BC, проведеному з точки L, тобто ці три точки лежать на одній прямій.

11 клас

1. Для всіх значень параметра *a* розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}=a$.

Відповідь: Якщо $a\in\left(-\infty;\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, то $x\in\varnothing$,

якщо $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$, то $x=\frac{5}{2}$,

якщо $a\in\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{3}\right]$, то $x=3a^2-2\pm2a\sqrt{2a^2-3}$,

якщо $a\in\left(\sqrt{3};+\infty\right)$, то $x=3a^2-2+2a\sqrt{2a^2-3}$.

Вказівки до розв'язання.

Дослідимо функцію $y=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}$ на екстремум і монотонність. Область її визначення – проміжок $[1,+\infty)$. $y'=\frac{2\sqrt{x-1}-\sqrt{2x+1}}{2\sqrt{(x-1)(2x+1)}}$.

$y'=0$ при $x=\frac{5}{2}$ – точка мінімуму, а оскільки вона єдина, то $y\left(\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}$ – найменше значення функції. Отже, при $a<\sqrt{\frac{3}{2}}$ рівняння не має розв'язків.

Оскільки $y(1)=\sqrt{3}$, то на відрізку $\left[1,\frac{5}{2}\right]$ функція спадає від $\sqrt{3}$ до $\sqrt{\frac{3}{2}}$. На проміжку $\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$ функція безмежно зростає від значення $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Тому при $a=\sqrt{\frac{3}{2}}$ рівняння має розв'язок $x=\frac{5}{2}$.

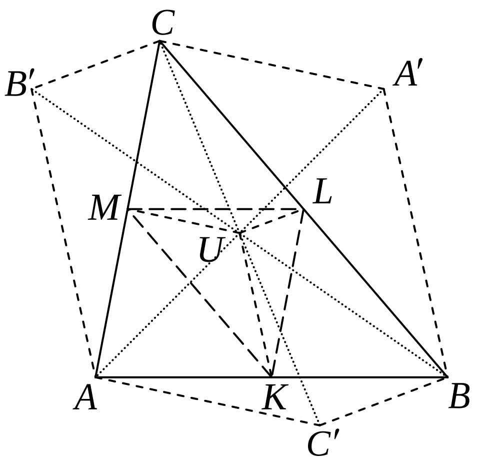
При $\sqrt{\frac{3}{2}}<a\le\sqrt{3}$ – два розв'язки, які легко знайти позбувшись радикалів: $x=3a^2-2\pm2a\sqrt{2a^2-3}$.

При $a>\sqrt{3}$ – один розв'язок: $x=3a^2-2+2a\sqrt{2a^2-3}$.

Якщо $a<\sqrt{\frac{3}{2}}$, то рівняння розв'язків не має.

2. Для трикутника ABC позначимо через M, L, K середини його сторін. Всередині трикутника MKL вибрана точка U. Точки A', B', C' – симетричні відповідно точкам A, B, C відносно точки U. Доведіть, що площа шестикутника $AB'CA'BC'$ удвічі більша за площу трикутника ABC.

Вказівки до розв’язання.



Гомотетія з центром у точці A і коефіцієнтом 2 переводить трикутник MKU у трикутник CBA', тому $S_{CBA'} = 4S_{MKU}$. Аналогічно $S_{ACB'} = 4S_{KLU}$, $S_{BAC'} = 4S_{LMU}$. Разом маємо:

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4S_{MKL} = S_{ABC} \Rightarrow S_{AC'BA'CB'} = 2S_{ABC}.$$

3. 2015 осіб розбиті на $k \le 2015$ не порожніх груп з номерами від 1 до k. Доведіть, що можна роздати їм 2015^2 цукерок так, щоб у кожній групі всі одержали порівну цукерок, а член групи з більшим номером завжди одержував більше, ніж член групи з меншим номером.

Вказівки до розв’язання.

Нехай a_i, $i = 1, 2, ..., k$, – кількість осіб в *i*-тій групі. Тоді $a_1 + a_2 + ... + a_k = 2015$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрату і згрупуємо всі члени, які містять a_k. Одержимо

$$a_1^2 + ... + a_{k-1}^2 + 2a_1a_2 + ... + 2a_{k-2}a_{k-1} + a_k(a_k + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_{k-1}) = 2015^2.$$

Тепер згрупуємо всі ще не згруповані доданки, які містять a_{k-1} і т.д. У підсумку одержимо

$$a_1(a_1) + a_2(a_2 + 2a_1) + a_3(a_3 + 2a_1 + 2a_2) + ... + a_k(a_k + 2a_1 + 2a_2 + ... + 2a_{k-1}) = 2015^2.$$

Дамо кожному члену *i*-тої групи таку кількість цукерок, яка дорівнює значенню виразу у дужці, що множиться на a_i. Очевидно, вираз в *i*-тій дужці ($i = 2, 3, ..., k$) на $a_i + a_{i-1}$ більший, чим в (*i*–1)-й дужці, а сума всіх розданих цукерок дорівнює 2015^2.

4. Нехай послідовність (a_n) задана за правилом $a_1 = 2$ і $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$, коли $n \geq 2$. Знайдіть a_{2015}.

Відповідь: $a_{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$.

Вказівки до розв'язання.

Нехай $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, тоді $S_1 = a_1 = 2$ і

$$S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + a_n = S_{n-1} + a_n = S_{n-1} + \left(\frac{n+1}{n-1}\right) S_{n-1} = \frac{2n}{n-1} S_{n-1}.$$

Отже,

$$S_n = \left(\frac{2n}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right) \cdot \left(\frac{2(n-2)}{n-3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{2 \cdot 3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{1}\right) \cdot S_1 = 2^n n.$$

Оскільки $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n n - 2^{n-1}(n-1) = 2^{n-1}(n+1)$, то $a_{2015} = 2016 \cdot 2^{2014}$.

5. Нехай $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ – чотири найменші дільники числа n. Знайдіть усі значення, які може набувати число n, якщо $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

Відповідь: $n = 130$.

Вказівки до розв'язання.

Зрозуміло, що $d_1 = 1$. Припустимо, що $d_2 \neq 2$, тоді число n разом з усіма своїми дільниками повинно бути непарним, але тоді з однієї сторони рівності

$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \qquad (1)$$

маємо непарне число, а з іншої парне. Отже, $d_2 = 2$. Оскільки число n парне, $d_1 = 1$, а $d_2 = 2$, то з рівності (1) можемо зауважити, що одне з чисел d_3, d_4 повинно бути парне, а інше непарне. Тому існують два випадки:

- Якщо $n \vdots 4$, то $\{d_3, d_4\} = \{4, p\}$, де $p \geq 3$ просте. З рівності (1) маємо
$$n = 1 + 2^2 + 4^2 + p^2 = 21 + p^2 \vdots 4,$$
що неможливо, бо не існує такого простого p, що $p^2 \equiv 3 \pmod 4$.
- Якщо n не ділиться на 4, то $d_3 = p$, а $d_4 = 2p$, де $p \geq 3$ просте. З рівності (1) маємо
$$n = 1 + 2^2 + p^2 + 4p^2 = 5 + 5p^2 \vdots 5.$$
Оскільки n ділиться на 5 і не ділиться на 4, то $p \neq 3$ (числа 3 та 5 одночасно належати до чотирьох найменших дільників числа n не можуть, бо обидва непарні). Тому $p = 5$ і $n = 130$.