10 клас

Задача 10.1. *Доведіть, що для довільного дійсного числа a виконується нерівність*

$$a^4 + 1 \geq a^3 + a.$$

Розв'язання. Перенесемо всі змінні величини у ліву сторону нерівності і одержимо таку рівносильну нерівність:

$$a^4 - a^3 - a + 1 \geq 0.$$

Зробивши рівносильні перетворення одержимо

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a-1)(a^3-1) = (a-1)^2(a^2+a+1).$$

Залишилось використати, що $(a-1)^2 \geq 0$ і $a^2+a+1 = (a+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0$.

Зауваження. Можна використати, що вирази $a-1$ і a^3-1 є виразами одного знаку. Звідси випливає, що

$$a^4 - a^3 - a + 1 = (a-1)(a^3-1) \geq 0.$$

Задача 10.2. *Розв'яжіть рівняння* $(3x^2-2x)^2 + 9x^2 = 6x + 4$.

Розв'язання. Перенесемо всі вирази у ліву сторону рівняння і, зробивши прості перетворення, одержимо таке рівносильне рівняння:

$$(3x^2-2x)^2 + 3(3x^2-2x) - 4 = 0.$$

Зробивши заміну $t = 3x^2 - 2x$ і розв'язавши рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0$, одержимо, що

$$t = -4 \quad \text{або} \quad t = 1.$$

Рівняння $3x^2 - 2x = -4$ розв'язків не має. Тому всіма розв'язками вихідного рівняння будуть розв'язки рівняння $3x^2 - 2x = 1$.

Відповідь: $x \in \{-\frac{1}{3}, 1\}$

Задача 10.3. *Обчисліть значення дробу*

$$\frac{(3+6+\cdots+99)^2 - (7+14+21+\cdots+147)^2}{(1+2+3+\cdots+100)+1000}.$$

Розв'язання. Застосовуючи до трьох виразів, які знаходяться в дужках, формулу суми n членів арифметичної прогресії, одержимо

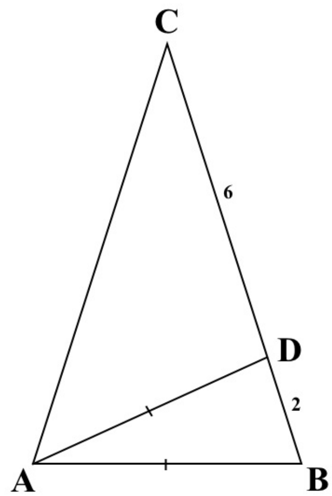
$$\frac{(3+6+\cdots+99)^2 - (7+14+21+\cdots+147)^2}{(1+2+3+\cdots+100)+1000} = \frac{\left(\frac{(3+99)\cdot 33}{2}\right)^2 - \left(\frac{(7+147)\cdot 21}{2}\right)^2}{\frac{(1+100)\cdot 100}{2} + 1000} =$$

$$= \frac{(51\cdot 33)^2 - (77\cdot 21)^2}{101\cdot 50 + 1000} = \frac{3^2\cdot 11^2(51^2-49^2)}{50(101+20)} = \frac{3^2\cdot 11^2(51-49)(51+49)}{50\cdot 121} = 36.$$

Відповідь: 36.

Задача 10.4. *Точка D ділить бічну сторону BC рівнобедреного трикутника ABC з основою AB на відрізки довжиною довжиною 2 см і 6 см. Знайдіть довжини сторін трикутника ABC, якщо $AB = AD$.*

Розв'язання. Зрозуміло, що $CA = CB = 8$ см. Розглянемо спочатку випадок, коли $CD = 6$ см і $DB = 2$ см. Зауважимо, трикутники ABC і DBA подібні, як рівнобедрені трикутники, які мають однакові кути при основах ($\angle ABC = \angle DBA$).



Тому сторони даних трикутників пропорційні. Зокрема,

$$CB : AB = AB : DB.$$

Отже, $AB = \sqrt{CB \cdot DB}$. Якщо $CD = 6$ см і $DB = 2$ см, то $AB = 4$ см. Якщо ж $CD = 2$ см і $DB = 6$ см, то $AB = 4\sqrt{3}$ см.

Відповідь: 8 см , 8 см, 4 см; або 8 см , 8 см, $4\sqrt{3}$ см

Задача 10.5. *За круглим столом сидять 2015 дорослих і 2015 дітей. Доведіть, що у одного з присутніх за столом обидва сусіди - діти.*

Розв'язання. (I спосіб). Розфарбуємо 4030 стільців за столом у червоний та синій кольори по 2015 стільців так, щоб вони чергувались за столом: червоний, синій, червоний, синій, і т.д. Зазначимо, що принаймні 1008 дітей сидять на стільцях одного кольору. Справді, якщо б на стільцях одного кольору сиділо б менше, ніж 1008 дітей, то на стільцях червоного і синього кольору разом сиділо б не більше, ніж 1007+1007=2014 дітей. А це суперечить умові.

Для певності вважатимемо, що за синіми стільцями сидить принаймні 1008 дітей. Залишимо за столом лише сині стільці розам з дітьми і дорослими, які на них сидять, а червоні стільці заберемо. Нам залишилось довести, що в утвореному розміщенні за круглим столом 2015 людей хоча би двоє дітей сидять поруч.

Припустимо, що це не так. Тоді справа біля кожної дитини сидить дорослий. Тому дорослих, які сидять справа від дітей, не менше, ніж дітей. Оскільки дітей не менше, ніж 1008, то і дорослих також не менше, ніж 1008. А разом їх не менше, ніж 2016, що приводить до суперечності.

(II спосіб). Деякий набір дорослих назвемо *групою*, якщо вони сидять поруч за столом і зліва та справа від них сидять діти. Аналогічно вводиться поняття *група дітей*. Зрозуміло, що за столом люди сидять групами, причому групи чергуються: група дорослих, група дітей і т.д. Поставивши у відповідність кожній групі дорослих ту групу дітей, яка сидить справа від неї, ми одержимо взаємнооднозначну відповідність між групами дорослих і дітей. Отже, кількість груп дорослих дорівнює кількості груп дітей. Позначимо цю кількість через n.

Припустимо, що за столом немає жодної людини, у якої обоє сусідів – діти. Тоді кожна група дорослих складається не менше, ніж з двох людей, а кожна група дітей – не більше, ніж з двох людей. Тепер для загальної кількості дорослих маємо

$$2015 \geq 2n,$$

а для загальної кількості дітей –

$$2015 \leq 2n.$$

Отже, $2015 = 2n$, що дає суперечність.