11 клас

Задача 11.1. *Розв'яжіть рівняння*

$$2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0.$$

Розв'язання. Використовуючи добре відомі тригонометричні рівності $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ і $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, одержимо таке рівносильне рівняння:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0.$$

Зробивши заміну $t = \sin x$ і розв'язавши рівняння $2t^2 - 5t + 2 = 0$, одержимо, що

$$t = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad t = 2.$$

Рівняння $\sin x = 2$ розв'язків не має, адже $|\sin x| \le 1$. Тому всіма розв'язками вихідного рівняння будуть розв'язки рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.2. *Нехай* a, b *– дійсні числа такі, що* $a + b = 2016$. *Доведіть, що*

$$a^2 + b^2 - 2ab - a + 3b \ge 2015.$$

Розв'язання. Використовуючи рівність $2015 = a + b - 1$ і зробивши рівносильні перетворення, одержимо рівносильну нерівність

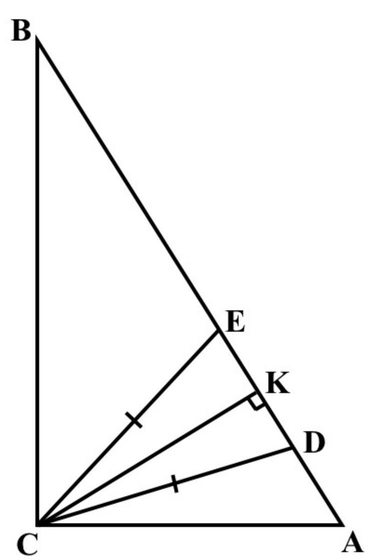
$$a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 \ge 0.$$

Залишилось зауважити, що

$$a^2 + b^2 - 2ab - 2a + 2b + 1 = (a - b - 1)^2.$$

Задача 11.3. *Точки* D *і* E *ділять гіпотенузу* AB *прямокутного трикутника* ABC *на три відрізки* AD, DE *і* EB, *довжини яких відносяться як* $1 : 4 : 7$ *відповідно. Знайдіть кути трикутника* ABC, *якщо* $CD = CE$.

Розв'язання. Нехай $AD = x$. Тоді $DE = 4x$ і $EB = 7x$. Проведемо висоту CK трикутника ABC, яка є також висотою рівнобедреного трикутника DCE, проведеною до основи DE.



Тому CK також є медіаною трикутника DCE, тобто $DK = KE = 2x$. Таким чином,

$$AK = AD + DK = x + 2x = 3x$$

і

$$BK = BE + EK = 7x + 2x = 9x.$$

За властивістю висоти у прямокутному трикутнику, проведеної до гіпотенузи, маємо

$$CK = \sqrt{AK \cdot BK} = 3\sqrt{3}x.$$

Тепер

$$\operatorname{tg} \angle CAB = \frac{CK}{AK} = \frac{3\sqrt{3}x}{3x} = \sqrt{3}, \quad \angle CAB = 60^\circ \quad \text{і} \quad \angle CBA = 30^\circ$$

Відповідь: $\angle A = 60^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle C = 90^\circ$.

Задача 11.4. *Знайдіть всі цілі розв'язки системи рівнянь*

$$\begin{cases} \sqrt{x + 2015} = y \\ x + 10\cos(\pi y) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Оскільки $-1 \le \cos(\pi y) \le 1$, то

$$-10 \le -10\cos(\pi y) \le 10.$$

Отже, з другого рівняння випливає, що

$$-10 \le x \le 10,$$

тобто

$$2005 \le x + 2015 \le 2025.$$

З першого рівняння випливає, що число $\sqrt{x + 2015}$ є цілим, тобто число $x + 2015$ – повний квадрат. Оскільки на відрізку $[2005, 2025]$ є лише один повний квадрат ($2025 = 45^2$), то можливий лише один розв'язок $x = 10$, $y = 45$.Залишилось зробити перевірку.

Відповідь: $x = 10$, $y = 45$.

Задача 11.5. *Кожну точку на колі радіуса 1 см пофарбовано у зелений або чорний колір. Доведіть, що можна вибрати на колі дві точки одного кольору так, що відстань між ними*

а) не менша, ніж $\sqrt{3}$ см;   б) не менша, ніж $2\sin 72^\circ$ см.

Розв'язання. а) Впишемо в коло правильний трикутник. Довжина його сторони дорівнює $\sqrt{3}$ см. Залишилось вибрати дві вершини даного трикутника одного кольору.

б) Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що кожні дві точки на колі, які знаходяться на відстані не меншій, ніж $d = 2\sin 72^\circ$ см, пофарбовано різними кольорами. Впишемо в коло правильний п'ятикутник $ABCDE$. Довжина його найбільшої діагоналі дорівнює $d = 2\sin 72^\circ$ см. Покажемо, що кожні дві сусідні вершини пофарбовано однаковим кольором.

Розглянемо, для певності, вершини A і B. Оскільки $AD = BD = d$, то згідно з припущенням вершини A і B мають колір, відмінний від кольору точки D. Отже, A і B – точки одного кольору. Для решти пар вершин міркуємо аналогічно.

Отже, кожні дві сусідні вершини пофарбовано однаковим кольором. Значить, всі вершини пофарбовано однаковим кольором. Зокрема, A і D. Оскільки $AD = d$, то ми одержали суперечність.