8 клас

Задача 8.1. *Додатні числа* a *та* b *такі, що* $a^2 + b^2 = 12$, $ab = 2$. *Чому дорівнює* $(a+b)^3$*?*

Розв'язання. Оскільки $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 16$ і числа a та b додатні, то $a + b = 4$. Тому $(a+b)^3 = 64$.

Відповідь. 64.

Задача 8.2. *На продовженні сторони* AC*, яка лежить навпроти найбільшого кута трикутника* ABC*, відкладено такий відрізок* CD*, що* $CD = CB$*. Довести, що кут* ABD *не гострий.*

Розв'язання. Нехай $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, тоді $\angle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$. Оскільки $\angle ACB$ є зовнішнім для рівнобедреного трикутника BCD і $\angle CBD = \angle CDB$, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ACB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Тому

$$\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 90^\circ + \frac{\beta - \alpha}{2} \geq 90^\circ.$$

Задача 8.3. *Дорога довжиною 8 кілометрів від туристичного табору до гірського озера складається з трьох частин – підйому на хребет, рівної ділянки хребтом та спуску з хребта до озера. Турист на дорогу від табору до озера і назад витратив 5 години і 40 хвилин, а його середня швидкість на підйомах складає 2 км/год, на рівній ділянці 3 км/год і при спусках з хребта – 4 км/год. Яка довжина рівної ділянки дороги між табором та озером?*

Розв'язання. Нехай довжина рівної ділянки дороги між табором та озером x км, а сума довжин підйому на хребет і спуску з хребта y км. Оскільки турист пройшов відстань від табору до озера і назад, то він підіймався на хребет на двох ділянках дороги загальною довжиною y км, спускався з хребта на двох ділянках дороги загальною довжиною y км та двічі пройшов рівну ділянку дороги довжиною x км. Тому числа x та y є розв'язками такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{y}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{17}{3}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо, зокрема, що $x = 4$ км.

Відповідь. 4 км.

Задача 8.4. *Чи можна подати число* 2015 *у вигляді суми квадратів двох натуральних чисел?*

Розв'язання. Припустимо, що є такі натуральні числа m і n, що

$$m^2 + n^2 = 2015.$$

Зауважимо, що числа m і n різної парності, бо інакше сума їхніх квадратів була б парною, що не так. Тому одне з цих чисел парне (наприклад, m), а інше – непарне. Тоді $m = 2k$, а $n = 2l - 1$ для деяких натуральних k та l. Оскільки

$$m^2 + n^2 = 4k^2 + 4l^2 - 4l + 1,$$

то

$$4\left(k^2 + l^2 - l\right) = 2014.$$

Звідси випливає, що число 2014 ділиться на 4, що приводить до суперечності.

Відповідь. Не можна.

Задача 8.5. *На дні народження у Тарасика було 10 гостей, яких іменинник частував цукерками. Відомо, що гості з'їли* 44 *цукерки. Доведіть, що знайдеться принаймні двоє гостей, які з'їли однакову кількість цукерок.*

Розв'язання. Припустимо, що всі гості з'їли різну кількість цукерок. Впорядкуємо ці кількості по зростанню

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{10}.$$

Легко бачити, що $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 1$, $\ldots$, $a_{10} \geq 9$. Тепер маємо

$$44 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} < 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45,$$

що дає суперечність.