9 клас

Задача 9.1. *Яке з чисел більше:* $2015 \cdot 2016 + 6050$ *чи* 2017^2*?*

Розв'язання. Оскільки

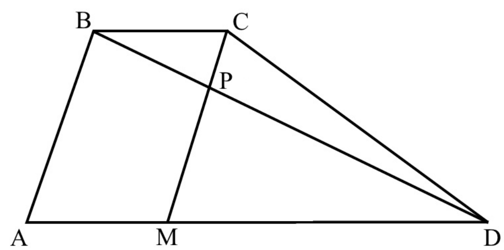
$$2017^2 - 2015 \cdot 2016 = 2017^2 - (2016-1) \cdot 2016 = 2017^2 - 2016^2 + 2016 =$$
$$= (2017-2016)(2017+2016) + 2016 = 4033 + 2016 = 6049 < 6050,$$

то перше число більше, ніж друге.

Відповідь: $2015 \cdot 2016 + 6050 > 2017^2$.

Задача 9.2. *В трапеції $ABCD$ основа AD в три рази довша, ніж BC. Точка M лежить на відрізку AD, причому відрізок CM паралельний до AB, а відрізки CM і DB перетинаються в точці P. Знайдіть відношення CP до MP.*

Розв'язання. Нехай $BC = a$. Тоді $AD = 3a$. З побудови випливає, що $AM = BC = a$. Тоді $MD = 2a$.



З подібності трикутників BCP та MPD випливає, що

$$\frac{CP}{MP} = \frac{BC}{DM} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{CP}{MP} = \frac{1}{2}$.

Задача 9.3. *Остап на канікулах готувався до олімпіади з математики і розв'язував задачі: спочатку – простіші, а потім – складніші. Кожен день кількість задач, які він розв'язав, зменшувалася на деяку сталу кількість відсотків. Через три дні виявилося, що кількість задач, які Остап всього розв'язав за три дні, становить 231,25% від кількості задач, які він розв'язав за перший день. На скільки відсотків щодня зменшувалась кількість розв'язаних ним задач?*

Розв'язання. Нехай z – кількість задач, які Остап розв'язав у перший день, а x – кількість відсотків, на яку кожного дня зменшувалося число розв'язаних ним задач. Тоді за другий день Остап розв'язав $z(1 - \frac{x}{100})$ задач, а за третій день – $z(1 - \frac{x}{100})^2$ задач. Розв'язуючи рівняння

$$z + z(1 - \tfrac{x}{100}) + z(1 - \tfrac{x}{100})^2 = z \cdot \frac{231,25}{100},$$

ми отримаємо відповідь $x = 25\%$.

Відповідь: 25%.

Задача 9.4. *Розв'яжіть рівняння* $7[x] + 10\{x\} = 12$ *(тут $[x]$ – ціла частина числа x, тобто, найбільше ціле число, яке не перевищує x, а $\{x\}$ – дробова частина числа x, тобто, $\{x\} = x - [x]$).*

Розв'язання. Оскільки дробова частина числа знаходиться на проміжку $[0, 1)$, то з вихідного рівняння випливає нерівність

$$0 \le \frac{12 - 7[x]}{10} < 1.$$

Звідси випливає, що
$$\frac{2}{7} < [x] \leq \frac{12}{7}.$$
Ціле число 1 – це єдине ціле число, яке задовольняє дану нерівність. Отже, $[x] = 1$. Підставимо у вихідне рівняння і отримаємо, що
$$\{x\} = 0,5.$$
Таким чином, $x = 1,5$.

Відповідь: $x = 1,5$.

Задача 9.5. *В першому класі однієї з шкіл китайського міста Тяньцзинь навчається 99 учнів. В обідню перерву усі діти з цього класу стають в рядок, і директор школи Тянь та його заступник Цзинь по черзі пригощають дітей пиріжками з рисом, причому за один раз кожний з них може пригостити одного чи двох учнів, які стоять поруч. Тому, хто пригощає останнього учня, кухар Пунь завжди готує смачний юай. Чи може директор школи Тянь чи його заступник Цзинь забезпечити, що йому дістанеться смачний юай, якщо першим почне пригощати учнів директор Тянь?*

Розв'язання. Директор школи Тянь може забезпечити, що йому дістанеться смачний юай. Для цього першим ходом директор Тянь повинен пригостити учня, який стоїть по центру, тобто, порядковий номер якого 50. Далі, після кожного ходу свого заступника, який пригощає одного чи двох учнів, що стоять поруч, директор повинен пригостити таку ж кількість учнів, які стоять симетрично до них відносно 50-го учня.